Actes de la XVII Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament. Barcelona, SCHCT-IEC
Ferragud, C.; Massa-Esteve, M. R. (ed.) (2021) p. 75-88
DOI: 10.2436/10.2006.04.9

ALGUNAS OBSERVACIONES SOBRE EL BENEFICIO DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA ACTIVIDAD DOCENTE E INVESTIGADORA

PEDRO JOSÉ HERRERO PIÑEYRO;[1] ANTONIO LINERO BAS;[2] ANTONIO MELLADO ROMERO[3]
[1] IES RICARDO ORTEGA, FUENTE ÁLAMO (MURCIA).
[2] DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE MURCIA.
[3] IES FRANCISCO SALZILLO, ALCANTARILLA (MURCIA).

Palabras clave: *beneficio de la historia de las matemáticas, docencia, investigación, actividades para el aula*

Some remarks on the benefits of the history of mathematics in both teaching and research activity

Summary: *In this paper, we make some remarks about the use and benefits of the history of mathematics both in our teaching activity in secondary school and in teacher training courses, and in our research in pure mathematics. In the sphere of secondary school, we present some ideas on the performance of activities involving the extraction of n-roots of positive integers from the reading of Viète's work* De Numerosa Potestatum. *We also highlight the significance of the history of mathematics for the acquisition of a comprehensive understanding of the evolution of different aspects of this discipline and we briefly describe the path followed by Apollonius's theorem, connecting different branches of mathematics. Lastly, we illustrate the benefits of the history of mathematics in relation to our research efforts by showing how to make appropriate use of a certain inequality in a problem of discrete dynamical systems.*

Key words: *benefits of the history of mathematics, teaching, research, classroom activities*

Introducción

En estas notas pretendemos reflexionar sobre los beneficios que reporta el estudio de la historia de las matemáticas, tanto en el ámbito de las enseñanzas media y universitaria como en la labor de investigación para la generación de nuevos conocimientos en los distintos campos de las matemáticas. Abordamos esta tarea desde tres puntos de vista, con los siguientes objetivos: desde la perspectiva de la enseñanza media, para hacer atractiva la presentación de diferentes temas mediante materiales con actividades para el aula; en la formación de futuros docentes, haciendo ver la utilidad de la historia para, entre otros, contextualizar los temas y dar una visión unificadora de las matemáticas; desde el punto de vista de la investigación en matemáticas, comentaremos su importancia para, a través de la lectura de autores antiguos, obtener la inspiración para resolver un problema o plantear nuevas cuestiones.

En cada parte, apuntaremos una serie de reflexiones generales sobre la utilidad de la historia de las matemáticas. Además, en los tres casos trataremos de ejemplificarlas a través de situaciones concretas. A continuación, las esbozamos someramente.

En la etapa de enseñanza media, veremos cómo la lectura de textos originales nos puede llevar a elaborar materiales para el aula. Así se hizo en (Herrero *et al.*, 2017), en donde preparamos una serie de actividades basadas en métodos numéricos de resolución de ecuaciones del siglo XVI. Ahora, partiendo de la lectura de *De numerosa potestatum* (1600) de François Viète (1540-1603), planteamos una serie de actividades para el aula de secundaria sobre el tema de cálculo y aproximación de raíces enésimas.

En relación con la enseñanza universitaria, en ocasiones necesitamos despejar dudas sobre el recorrido histórico de un tema o un resultado concretos. Este es el caso de una generalización del teorema de Apolonio que se presenta como original en Amir-Moez y Hamilton (1976), mientras que en Recasens (2008) nos queda claro que dicho resultado ya era conocido por Leonhard Euler (1707-1783), véase Euler (1750), e incluso por José Zaragoza (1627-1679), véase Zaragoza (1674).

Finalmente, en la labor investigadora, la lectura de textos de otras épocas nos puede inspirar a veces para abordar la demostración de un resultado. Lo ilustraremos con Linero y Soler (2020), un trabajo de investigación en el ámbito de los sistemas dinámicos discretos, en donde se precisa comparar el tamaño de las columnas de una sucesión de matrices 10×10, lo que se consigue en parte gracias a elementos de geometría clásica. Todo ello por la inspiración de la lectura de los *Elementos* de Euclides en la versión presentada por Pierre Hérigone (1580-1643), véase Hérigone, 1634, tomo I.

Materiales para el aula: aproximación de raíces enésimas

En la etapa obligatoria de secundaria, el aprendizaje de las matemáticas por parte de los alumnos suele verse frenado por diferentes factores. A la inherente dificultad epistemológica al introducir los conceptos, hemos de añadir la desazón que se genera en los estudiantes con la presentación súbita de los temas, sin contextualizar y asimilados mediante la repetición, a veces tediosa, de ejercicios que siguen unos patrones muy marcados. Estos obstáculos metodológicos hacen en general crecer en el alumnado un sentimiento de desinterés, de falta de confianza y de control, e incluso de impotencia, a la hora de asimilar la asignatura. En este sentido, pensamos que la historia de las matemáticas puede ser una herramienta pedagógica muy interesante para proporcionar un enriquecimiento sustancial en el proceso de enseñanza y aprendizaje, nos puede servir para intentar hacer atractivos los temas, para motivar al alumnado, dando sentido y contextualizando cada una de sus partes, todo ello con el objetivo de que perciban la transmisión de las matemáticas como una ciencia construida mediante un trabajo colectivo y en continua evolución (Massa-Esteve, 2014). Además, el uso de fuentes originales nos permitirá elaborar materiales que rompan con la monotonía tradicional, que supongan la realización de actividades no repetitivas en las que el alumno potencie su creatividad y adopte estrategias no estándares para su resolución. Intentaremos presentar tareas enriquecedoras, en la búsqueda de una formación completa del alumnado.

En esta sección vamos a incidir en la cuestión de la resolución numérica de raíces enésimas. Recomendamos Cajori (1910) como introducción al tema, puede consultarse también Barrow-Green *et al.* (2019). Si queremos contextualizar históricamente el tema, en primer lugar debemos decir que la extracción de raíces cuadradas y cúbicas aparece ya como asunto de valor práctico indudable en las civilizaciones babilónica y egipcia. Lo encontramos en la civilización griega, tanto bajo el tamiz geométrico de los *Elementos* de Euclides como el aritmético en Arquímedes (c. 272-212 a. C.) o en Herón de Alejandría (10-70 d. C.). La universalidad del problema de aproximar raíces cuadradas y cúbicas hace que aparezca en diferentes culturas, aparte de la occidental, como en las culturas china e hindú. Siguiendo con este trazado somero de la historia de la aproximación de raíces enésimas, podemos citar también a Leonardo de Pisa (c. 1170 - c. 1250), quien en su *Liber abaci* nos muestra en el capítulo XIV cómo proceder con la extracción de raíces cuadradas y cúbicas. Ya durante el siglo XVI encontramos diferentes textos de aritmética donde hayamos la resolución de raíces cuadradas, tanto exactas como aproximadas, siguiendo la línea directriz de los *Elementos* de Euclides,[1] y la extracción de raíces de mayor potencia a través de un procedimiento numérico basado en lo que hoy denominamos *binomio de Newton*. Todas estas ideas y procedimientos desembocarán de manera magistral en la obra *De numerosa potestatum* (1600-1646) de Viète.

La primera publicación de la obra se realizó a cargo de Marino Ghetaldi (1568-1626) en 1600 (Viète, 1600). En 1646 se volvió a publicar una nueva versión de este trabajo, dentro de la *Opera mathematica* de Viète (1646), editada por Frans van Schooten (1615-1660), también en latín. Existe una traducción al inglés, aunque incompleta (Viète, 1983).

La obra se divide en tres partes: «De numerosa potestatum purarum resolutione» (Viète, 1600: f. 2-6; Viète, 1646: 163-172), donde Viète resolvió numéricamente las *ecuaciones puras*, de la forma $x^n = a$; «De numerosa potestatum adfectarum resolutione» (Viète, 1600: f. 7-34; Viète, 1646: 173-223), donde resolvió numéricamente ecuaciones con términos diferentes al de grado mayor y al término independiente (a este tipo de ecuaciones las llamará *afectadas*), aplicando el método usado en la extracción de las ecuaciones puras, y por último «Consectarium generale ad analysim potestatum adfectarum, et praeceptorum quae ad eam pertinent, recollectio» (Viète, 1600: f. 34-36; Viète, 1646: 224-228), con un resumen de consecuencias generales del análisis efectuado y una enumeración de preceptos que se deben tener en cuenta en la resolución de ecuaciones.

En cuanto a las ecuaciones puras, Viète plantea la resolución de cinco problemas, problemas I-V, desde la raíz cuadrada hasta la sexta:

$x^2 = 2916$; $x^3 = 157464$: $x^4 = 3311776$: $x^5 = 7962624$: $x^6 = 191102976$. En la notación de Viète: IQ *æquari* 29,16; IC *æquari* 157, 464; I *QQ æquari* 331,776; I *QC æquari* 7,962,624; I *CC æquari* 191,102,976, respectivamente.

1. Así, Pérez de Moya (c. 1512-1596), en su *Arithmetica practica y speculativa*, 1562, cuando trata la raíz cuadrada de 52417, nos comenta: «Y asi diras, que la rayz de 52 es 7 y sobran 3. Prosigue para sacar la rayz de los 3 que sobraron, y de los 4 que están entre los dos puntos, lo qual haras doblando los 7 que te han venido por rayz. Como muestra Euclides en la quarta del segundo…» (p. 457).

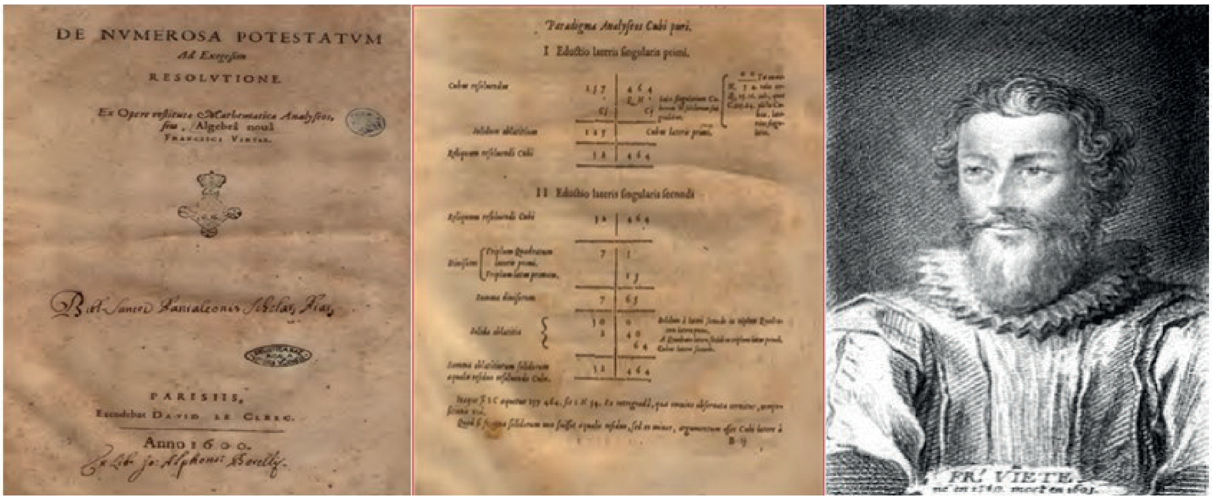


FIGURA 1. Portada de *De Numerosa Potestatum* (Viète, 1600); tablas para extraer la raíz cúbica de 157464 (Viète, 1600); imagen de Viète.
FUENTE: *https://en.wikipedia.org/wiki/François_Viète*.

La resolución de estas raíces (todas ellas exactas) se lleva a cabo a través de unas ingeniosas tablas, originales de Viète, en las que se va apoyando para, a través del desarrollo de la potencia de un binomio, ir obteniendo sus soluciones.

En relación con la aproximación numérica de raíces, en el precepto 9 que antecede a la resolución de las ecuaciones puras, Viète propone aproximar por exceso y por defecto las raíces, y afirma (véase la figura 2 para el texto en latín):

> (9)
>
> Pero si, aunque fuera menor, no quedaran puntos sobrantes, entonces es claro que la raíz es irracional. A la raíz completa que hemos obtenido le añadiremos una fracción cuyo numerador es el resto que nos queda por resolver del término inicial, y cuyo denominador será el divisor que obtendríamos si se añadiera otro punto al término a resolver. Esta fracción añadida a la raíz completa (ya obtenida) da una solución mayor que la verdadera. Si en la segunda potencia, el denominador es aumentado en uno, nos da una raíz más pequeña que la verdadera. La raíz está implícitamente entre estos divisores. (Traducción propia de los autores.)

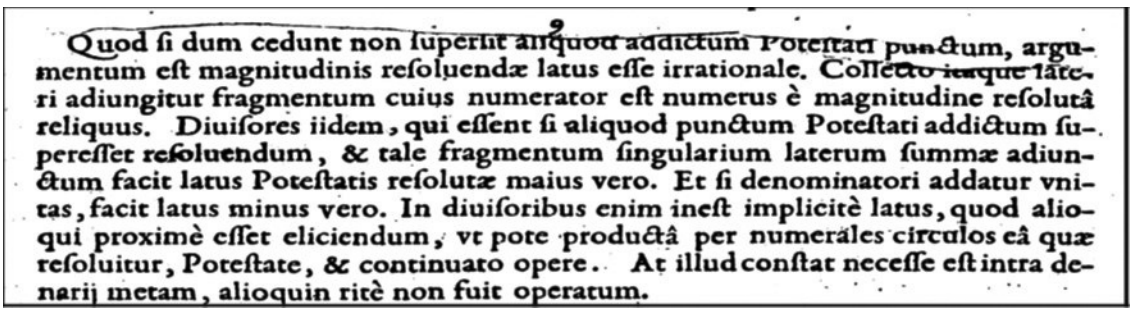

Quod si dum cedunt non superlit aliquod addictum Potestati punctum, argumentum est magnitudinis resoluendæ latus esse irrationale. Collecto itaque lateri adiungitur fragmentum cuius numerator est numerus è magnitudine resolutâ reliquus. Diuisores iidem, qui essent si aliquod punctum Potestati addictum superesset resoluendum, & tale fragmentum singularium laterum summæ adiunctum facit latus Potestatis resolutæ maius vero. Et si denominatori addatur vnitas, facit latus minus vero. In diuisoribus enim inest implicitè latus, quod alioqui proximè esset eliciendum, vt pote productâ per numerales circulos eâ quæ resoluitur, Potestate, & continuato opere. At illud constat necesse est intra denarij metam, alioquin ritè non fuit operatum.

FIGURA 2. Precepto noveno de *De numerosa potestatum*.
FUENTE: Viète, 1600: f. 2v.

Es decir, en términos actuales, para aproximar $\sqrt[n]{A^n + R}$, se nos propone:

$$\textit{Raíz entera} + \frac{\textit{Resto}}{\textit{Divisor} + 1} < \textit{Solución} < \textit{Raíz entera} + \frac{\textit{Resto}}{\textit{Divisor}}, \text{ esto es, } A + \frac{R}{d+1} < \textit{Solución} < A + \frac{R}{d},$$

en donde el divisor d es $2A$ (raíz cuadrada), $3A^2 + 3A$ (raíz cúbica), $4A^3 + 6A^2 + 4A$ (raíz cuarta), etcétera.[2] Digamos que el precepto 9 es correcto para la aproximación de raíces cuadradas, pero deja de ser cierto en algunos casos cuando el índice de la raíz buscada es mayor o igual que 3.

En la edición de 1600, tras obtener en el problema III 24 como raíz cuarta de 331776, Viète pasa a estimar el valor de $\sqrt[4]{20000}$ y nos da las aproximaciones $11 + \frac{5359}{6095}$ y $11 + \frac{5359}{6094}$ (véase la figura 3), como consecuencia de aplicar el precepto 9, teniendo en cuenta que $20000 = 11^4 + 5359 = A^4 + R$ y que, en este caso, el divisor es $d = (A + 1)^4 - A^4 - 1 = 4A^3 + 6A^2 + 4A = 6094$. Además, el texto nos da una nueva aproximación, $11 + \frac{10718}{12189}$, que corresponde a emplear la desigualdad $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$, cuando a, b, c, d son cantidades positivas dadas tales que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.[3]

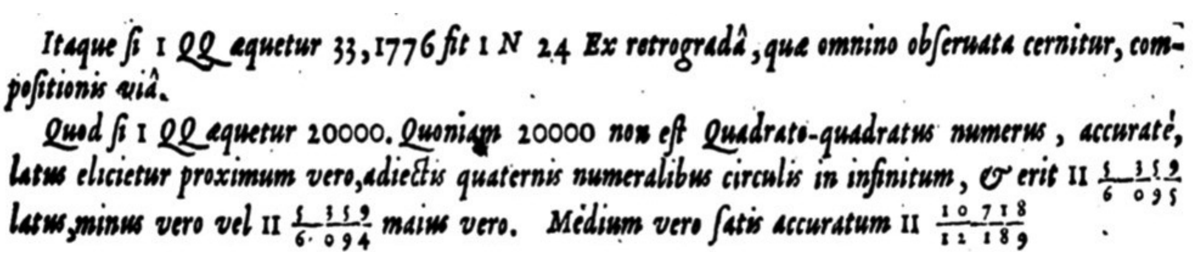

Itaque si 1 QQ æquetur 33,1776 fit 1 N 24 Ex retrogradâ, quæ omnino obseruata cernitur, compositionis viâ.
Quod si 1 QQ æquetur 20000. Quoniam 20000 non est Quadrato-quadratus numerus, accuratè, latus elicietur proximum vero, adiectis quaternis numeralibus circulis in infinitum, & erit 11 $\frac{5359}{6095}$ latus, minus vero vel 11 $\frac{5359}{6094}$ maius vero. Medium vero satis accuratum 11 $\frac{10718}{12189}$

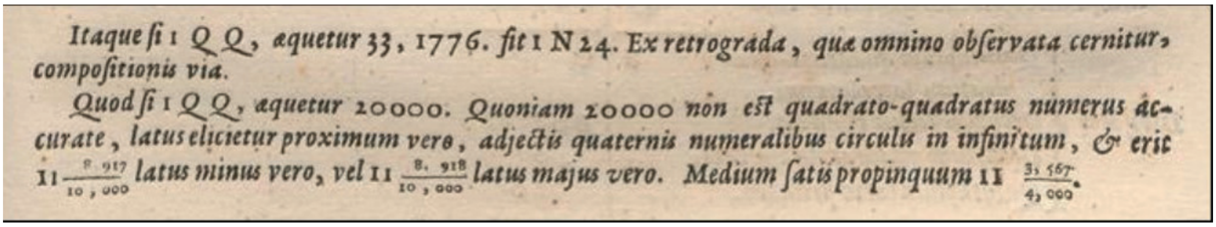
FIGURA 3. Aproximación de $\sqrt[4]{20000}$.
FUENTE: Viète, 1600: f. 5.

Recordemos que el precepto 9 propugna que $\sqrt[4]{20000}$ queda comprendida entre las fracciones $A + \frac{R}{\textit{Divisor} + 1}$ y $A + \frac{R}{\textit{Divisor}}$. Si realizamos las comprobaciones pertinentes, $11 + \frac{5359}{6095} < 11 + \frac{5359}{6094} < \sqrt[4]{20000}$, es decir, las dos aproximaciones obtenidas lo son, en realidad, por defecto, y la solución intermedia $11 + \frac{10718}{12189}$ tampoco mejora la aproximación.

En la edición de 1646 de Van Schooten (Viète, 1646), el precepto 9 se mantiene igual, pero al aproximar $\sqrt[4]{20000}$ encontramos una diferencia en la redacción del texto: tras añadir grupos de ceros, como en Viète (1600), aproxima por defecto y por exceso de este modo: $11 + \frac{8917}{10000} < 11 + \frac{8918}{10000}$ (véase la figura 4). No obstante, ambas siguen siendo aproximaciones por defecto.

2. Observemos que el divisor d es justamente $d = (A+1)^n - A^n - 1$.

3. Nicolas Chuquet (1445-1488) comenta en su obra *Triparty en la science des nombres* (1484) que a él se debe la invención y aplicación de esta desigualdad (en adelante, la llamaremos *regla de Chuquet*). El lector interesado en conocer más detalles puede consultar Herrero *et al*. (2017).


Itaque si 1 QQ, æquetur 33, 1776. fit 1 N 24. Ex retrograda, quæ omnino observata cernitur, compositionis via.

Quod si 1 QQ, æquetur 20000. Quoniam 20000 non est quadrato-quadratus numerus accurate, latus elicietur proximum vero, adjectis quaternis numeralibus circulis in infinitum, & erit $11 \frac{8,917}{10,000}$ latus minus vero, vel $11 \frac{8,918}{10,000}$ latus majus vero. Medium satis propinquum $11 \frac{3,567}{4,000}$.

FIGURA 4. Aproximación de $\sqrt[4]{20000}$.
FUENTE: Viète, 1646: f. 169.

El valor $11 + \frac{8917}{10000}$, por defecto, se ha obtenido añadiendo grupos cuaternarios de ceros (0000, 0000…), pero no se nos indica cómo se ha procedido a dar la aproximación final, seguramente truncando simplemente la cadena de grupos en algún momento. Intuimos también que la idea de aproximar por exceso consiste ahora en añadir una unidad a la última cifra obtenida. Pero el valor presentado, $11 + \frac{8917}{10000}$, sigue siendo una aproximación por defecto. Como en Viète (1600), se aplica la regla de Chuquet para obtener un valor intermedio, $\frac{8917 + 8918}{10000 + 10000} = \frac{3567}{4000}$. En esta nueva edición de *De numerosa potestatum*, no se menciona el porqué del pequeño cambio que hay en el texto. En la literatura, hasta donde nosotros sabemos, no hemos encontrado mención alguna a este cambio; de hecho, en la traducción con comentarios y notas de Witmer (Viète, 1983) ni siquiera se traducen los problemas III y IV, tan solo se indica que su tratamiento es análogo a los problemas anteriores.

A la hora de preparar actividades para el aula, digamos que en el currículo de las matemáticas de secundaria y bachillerato (decretos 220/2015 y 221/2015), el tratamiento de las raíces lo encontramos dentro de todos los cursos de la ESO. En el primer ciclo aparece el contenido «Raíces cuadradas. Estimación y obtención de raíces aproximadas»; se plantea el concepto de *raíz cuadrada* y se aproxima su valor mediante tanteo, a través de sucesiones que aproximan por exceso y defecto su valor, quedándonos con la última estimación. En el segundo ciclo, se pasa a un tratamiento básicamente operativo, acentuando su relación con potencias de exponente racional, pero se obvia por completo el concepto de *aproximación* tratado anteriormente, por cierto con poco detalle, en el primer ciclo. Sin embargo, en 3º de la ESO sigue apareciendo el concepto de *aproximación a la raíz cuadrada* dentro del contenido «Raíces cuadradas. Raíces no exactas. Expresión decimal», que normalmente no se desarrolla dentro del aula. El escaso bagaje algebraico que el alumno posee en el primer ciclo de la ESO es enriquecido en el segundo ciclo, donde ya se opera con polinomios y se manipulan, con total normalidad, expresiones como las potencias de un binomio. Es en estos dos cursos donde la extracción de raíces, no solo cuadradas, sino de orden superior, se puede relacionar con la potencia de un binomio para diseñar algoritmos que nos permiten obtener la aproximación decimal de dichas raíces.

Con todo lo anterior, a modo de ilustración, algunas propuestas de actividades para el aula podrían ser:

1) Desarrollar el contexto histórico: indagar otras aproximaciones a lo largo de la historia para raíces cuadradas y cúbicas (tablas babilónicas, Herón, cultura china…), tomando como punto de partida Cajori (1910) y Barrow-Green *et al*. (2019); búsqueda del personaje, Viète (vida, obras, época…).

2) Para ilustrar las expresiones retóricas y la notación cosista, expresar con esa notación ecuaciones para raíces cuartas, sextas, octavas… Además, para $n = 2,3$ sería muy conveniente que el alumno ligase el análisis numérico con el significado geométrico de las raíces cuadradas y cúbicas.

3) Formación de tablas para el cálculo de raíces cuadradas y cúbicas. Explicar razonadamente la tabla que usamos para extraer raíces cuadradas.

4) Manejo de desigualdades elementales para comprobar que la aproximación $A + \frac{R}{d+1}$ es siempre menor que la raíz buscada (al menos, comprobarlo para raíces cuadradas y cúbicas; se requiere el uso del binomio de Newton).

5) Desarrollar en clase la aproximación de $\sqrt{2}$ dada por Viète al final del problema I; además, desarrollar el problema III: ajustar los valores de A, d y R al caso de $\sqrt[4]{20000}$ y comprobar que la aproximación $A + \frac{R}{d}$ no lo es por exceso.

6) Uso de programas matemáticos de acceso libre (Maxima, Pyton…): programar un algoritmo que nos indique cuántos (y qué) valores del resto R nos proporcionan una aproximación $A + \frac{R}{d}$ por exceso de la raíz cúbica de $A^3 + R$.

Despejando dudas históricas

Cuando pensamos en la historia de las matemáticas, muchas veces nos vemos tentados en nuestra labor docente a usar alguna anécdota, más o menos contrastada, para atraer la atención de nuestra audiencia. Pero no debemos conformarnos con un acopio de anécdotas, de acontecimientos más o menos plausibles alrededor de un tema o de un personaje, más bien debemos ir más allá e inclinarnos por construir una cultura histórica sólida para fortalecer nuestros conocimientos. Esto implica en todos los casos buscar siempre rigurosidad en nuestros desarrollos, en el manejo de datos, en el análisis y comparación de los textos que usemos (Ferreirós, 2003). La memoria del pasado hará que comprendamos mejor el encaje de los contenidos desarrollados en clase, en cualquiera de las etapas educativas, y nos pondrá en aviso de la procedencia de un cierto tema y su recorrido hasta nuestros días.

En particular, las observaciones anteriores son pertinentes cuando impartimos clases dentro de un máster de formación para futuros profesores en educación secundaria, en la especialidad de matemáticas. En él, una posibilidad para ofertar la elaboración del trabajo de fin de máster (TFM) consiste en desarrollar una propuesta que se enmarque dentro de la historia de las matemáticas. Creemos que una estructura apropiada puede ser la siguiente: elegir una línea de trabajo en la que tratar o bien un autor, o una época, o incluso un tema matemático concreto; aprovechar la formación matemática del alumno para hacer un desarrollo matemático riguroso de los conceptos y resultados de los que trate su TFM; finalmente, proponer futuras actividades para el aula, basadas en la historia de las matemáticas, ajustadas a la línea de trabajo elegida y al currículo de ESO y bachillerato correspondiente a nuestra comunidad autónoma (decretos 220/2015 y 221/2015).

En la elaboración de una propuesta de TFM en los términos anteriores, si bien debemos destacar la fortaleza de la formación matemática de nuestros alumnos, la mayoría de ellos graduados en Matemáticas, en cambio detectamos carencias en su instrucción en historia de las matemáticas, de modo que nuestra primera tarea como tutores de un TFM o docentes en una asignatura de historia es hacerles reflexionar sobre las ventajas de introducir aspectos históricos en la formación de los alumnos de secundaria, de las que ya hemos hablado en la sección anterior. Y en aras de una correcta utilización de los recursos históricos, nuestros alumnos tutorizados deben ser exigentes con la rigurosidad en los desarrollos y procesos descritos, deben informarse convenientemente del recorrido histórico de un tema, de un resultado matemático, de la autoría de una prueba, etc. Al exigir al estudiante que profundice en las citas y sea riguroso con todas las afirmaciones expuestas, huyendo de la mera anécdota, facilitamos el fortalecimiento de su nivel educativo, tanto histórico como matemático. Además, nos podemos encontrar por el camino con gratas sorpresas.

Para ilustrar este punto, imaginemos que el estudiante de máster se ve requerido a desarrollar propuestas en el aula de secundaria en relación con cuestiones de geometría elemental, en particular, sobre cuadriláteros. Por ejemplo, una mera aplicación del teorema de Pitágoras nos muestra que, en un rectángulo, la suma de los cuadrados de sus lados es igual a la suma de los cuadrados de sus diagonales. La misma propiedad se mantiene para paralelogramos de lados a, b y diagonales e, d, esto es $2a^2 + 2b^2 = e^2 + d^2$, conocida como *ley del paralelogramo*. Un alumno de secundaria o bachillerato podría hacer la demostración de este resultado, o bien de nuevo a través del teorema de Pitágoras y una adecuada descomposición del paralelogramo, o bien a través del uso de vectores.

El origen de dicha ley del paralelogramo lo encontramos en la matemática griega. En concreto, en un resultado de Apolonio de Perga (c. 262 - c. 190 a. C.), que establece que para un triángulo de lados a, b, c se cumple que $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}c^2 + 2m^2$ donde m es la longitud de la mediana trazada desde el vértice opuesto al lado c. Es sencillo observar que el teorema de Apolonio es equivalente a la ley del paralelogramo. Este teorema nos ha llegado a través de la obra de Pappus de Alejandría (c. 290-350) (Pappus, 1986).

Siguiendo con el tema, de modo natural surge la pregunta de si es posible generalizar la propiedad de los paralelogramos a un cuadrilátero general. Es decir, si ABCD es un cuadrilátero de lados a, b, c, d y diagonales p, q, nos preguntamos si se sigue manteniendo la propiedad $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = p^2 + q^2$. El alumno podría responder a esta cuestión, de manera negativa, empleando el recurso del *contraejemplo*, diseñando un ejemplo para, digamos, un trapecio rectangular.

Si, en general, un cuadrilátero no satisface la ley del paralelogramo, nos podemos plantear si es posible encontrar otra expresión para la suma de los cuadrados de sus lados. Rastreando en la literatura, mediante repositorios y bases de datos adecuados de matemáticas, podemos encontrar Amir-Moez y Hamilton (1976), en donde se presenta como original[4] la siguiente generalización: si A, B, C, D son los vértices de un cuadrilátero, y M, N son los puntos medios de las diagonales AC y BD, entonces $(AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2 + (DA)^2 = (AC)^2 + (BD)^2 + 4(MN)^2$.

Es decir, la suma de los cuadrados de los lados del cuadrilátero es igual a la suma de los cuadrados de sus diagonales más un término adicional, el cuádruple del cuadrado de la distancia entre los puntos medios de las diagonales.

Debemos indicar que la prueba en Amir-Moez y Hamilton (1976) es meramente vectorial, con el mérito de usar elementos básicos de análisis funcional. Pero, ¿no existe ninguna prueba basada en geometría elemental? Indagando en ello, localizamos el trabajo de Recasens (2008), en donde queda

4. Los autores comentan: «We present here a generalization of Apollonius' theorem which makes an interesting geometric application of vector algebra.», p. 89.

claro que la generalización presentada en Amir-Moez y Hamilton ya era conocida mucho antes. En Recasens (2008) nos encontramos una grata sorpresa, ya que podemos leer que Euler había demostrado tal generalización unos doscientos años antes, con elementos puramente geométricos, basados en el uso del teorema de Apolonio (Euler, 1750). Pero no queda ahí la sorpresa: en el mismo trabajo de Recasens se nos muestra que incluso unos setenta y cinco años antes que Euler, por tanto, tres siglos antes de dicha generalización, se había demostrado en Zaragoza (1674). También Zaragoza hace una prueba basada en el teorema de Apolonio, pero diferente a la de Euler, ya que utiliza además su teoría del centro mínimo (Recasens, 2008).

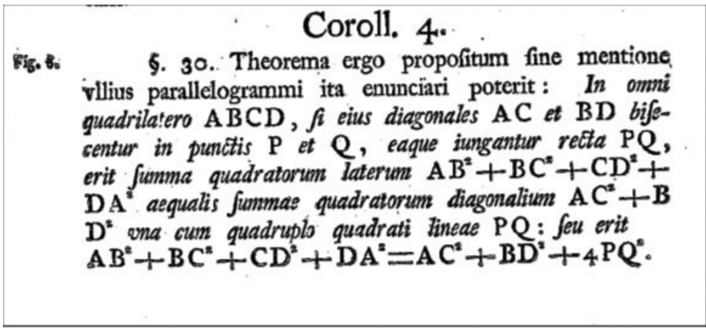

Coroll. 4.

Fig. 8. §. 30. Theorema ergo propositum sine mentione vllius parallelogrammi ita enunciari poterit: *In omni quadrilatero* ABCD, *si eius diagonales* AC *et* BD *bisecentur in punctis* P *et* Q, *eaque iungantur recta* PQ, *erit summa quadratorum laterum* $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2$ *aequalis summae quadratorum diagonalium* AC^2+BD^2 *una cum quadruplo quadrati lineae* PQ: *seu erit* $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4PQ^2$.

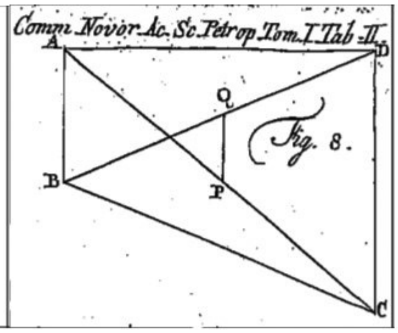
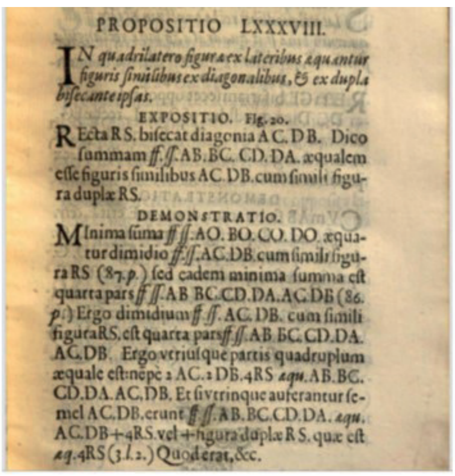


Figura 5. La generalización del teorema de Apolonio.
Fuente: Euler, 1750.

Hemos visto como la rigurosidad en la búsqueda de fuentes originales nos puede hacer conocer la procedencia histórica de los problemas. Este seguimiento nos hará tener una formación sólida de nuestros conocimientos y seremos capaces, incluso, de buscar conexiones entre diferentes ramas de las matemáticas. De nuevo, por el camino somos capaces de crear nuevas actividades para alumnos de secundaria: de Apolonio a los vectores; contraejemplos para la ley del paralelogramo en cuadriláteros generales; elementos notables de un triángulo (vértices, medianas, puntos medios…). Por último, pero no menos importante, conseguimos que el futuro docente desarrolle su tarea con cierta dosis de deleite personal, suscitando en él y en sus futuros alumnos el resorte imprescindible de la curiosidad en la educación.


PROPOSITIO LXXXVIII.

IN quadrilatero figuræ ex lateribus æquantur figuris similibus ex diagonalibus, & ex dupla bisecante ipsas.

EXPOSITIO. Fig. 20.

REcta RS. bisecat diagonia AC. DB. Dico summam ff. ff. AB. BC. CD. DA. æqualem esse figuris similibus AC. DB. cum simili figura duplæ RS.

DEMONSTRATIO.

MInima suma ff. ff. AO. BO. CO. DO. æquatur dimidio ff. ff. AC. DB. cum simili figura RS (87. *p.*) sed eadem minima summa est quarta pars ff. ff. AB BC. CD. DA. AC. DB (86. *p.*) Ergo dimidium ff. ff. AC. DB. cum simili figura RS. est quarta pars ff. ff. AB. BC. CD. DA. AC. DB. Ergo vtriusque partis quadruplum æquale est: nepè 2 AC. 2 DB. 4RS *æqu.* AB. BC. CD. DA. AC. DB. Et si vtrinque auferantur semel AC. DB. erunt ff. ff. AB. BC. CD. DA. *æqu.* AC. DB + 4RS. vel + figura duplæ RS. quæ est *æq.* 4RS (3 *l.* 2.) Quod erat, &c.

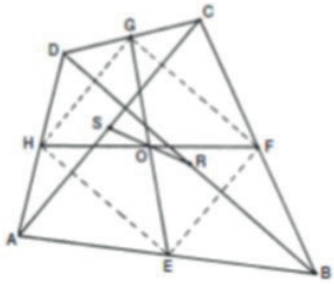


Figura 6. Generalización del teorema de Apolonio en Zaragoza (1674); dibujo auxiliar (Recasens, 2008).

La inspiración en la lectura de textos antiguos

En la tercera parte de este trabajo queremos comentar los beneficios del estudio de la historia de las matemáticas en la investigación matemática, pero no exclusivamente desde el punto de vista del análisis histórico de un tema, sino también como fuente de inspiración para resolver problemas en otros ámbitos de las matemáticas.

Reflexionando sobre el beneficio del conocimiento de la historia en nuestra labor investigadora, el primero que podemos aducir aquí es su capacidad de servir como nexo de unión entre intereses variados, en principio muy dispares entre sí, de servir de contrapeso a la especialización imperante en la investigación en matemáticas. Podemos usarla también para tratar de conseguir una divulgación atractiva de los temas que estudiamos, mediante una introducción que permita a todos los lectores partir de un terreno común, aunque luego las exigencias hagan que el esfuerzo individual se intensifique inevitablemente si queremos ir más allá en nuestras pesquisas. Otra reflexión interesante sobre las bondades del estudio de la historia reside en la conveniencia de la lectura de textos clásicos, como fuente de inspiración para resolver problemas concretos o abrir nuevas vías de investigación. Para ilustrarlo, vamos a ver que una sencilla desigualdad ha desatascado la prueba de un resultado que hemos obtenido dentro del campo de los sistemas dinámicos discretos.

En un sistema dinámico discreto la tarea primordial es averiguar qué le ocurre a largo plazo a la órbita de un punto $x \in X$, al conjunto de iteradas del sistema $\{x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \ldots\}$, o abreviadamente $\{x, f(x), f^2(x), \ldots, f^n(x), \ldots\}$, para una cierta función $f : X \to X$; a veces, f modela el comportamiento de un cierto fenómeno, y cada iterada a través de la ley determinada por f nos permite averiguar cómo evoluciona el modelo a lo largo del tiempo (discreto) n. Por ejemplo, si todas las órbitas convergen en un punto fijo, diremos que la dinámica es sencilla: este es el caso de $f(x) = \frac{1}{2}x$, con $x \in X = [0,1]$, es sencillo comprobar que la iterada n-ésima es $f^n(x) = \frac{1}{2^n}x$, $n \geq 1$, luego la órbita tiende a 0, que será un punto fijo atractor del sistema, pues $f(0) = 0$, y todas las órbitas convergen hacia él; si suponemos que f modela la densidad de población de una cierta especie, el modelo predice que la población se extingue.

No siempre la dinámica del sistema es tan sencilla como en el ejemplo anterior. Así sucede con las funciones conocidas como IET (del inglés *interval exchange transformation*): hablando vagamente, una n-IET T es una aplicación inyectiva $T : D \subset (0,1) \to (0,1)$ que trocea el intervalo en n partes disjuntas y las traslada sobre el cuadrado unidad con una pendiente constante, 1 o −1. Si la pendiente es negativa, se dice que la IET presenta un *flip* en el trozo correspondiente. En la figura 7 aparece la gráfica de una 6-IET con cuatro *flips*:

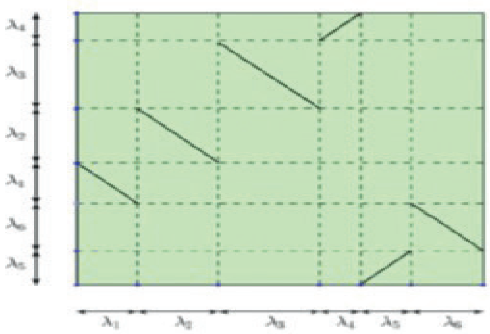


FIGURA 7. Ejemplo de 6-IET con cuatro *flips*.
FUENTE: Linero y Soler (2018).

Dada una IET con *flips*, queremos averiguar si puede darse el fenómeno de minimalidad, esto es, si todas las órbitas son densas, si visitan todos los entornos abiertos del intervalo (0,1). En Linero y Soler (2018), hemos sido capaces de construir IET minimales T con *flips*. Después de ese trabajo, nos planteamos otro cierto problema sobre el número de medidas invariantes asociadas a una IET minimal T. En Linero y Soler (2020), hemos contestado a esta pregunta, en el caso de 10-IET, encontrando IET minimales con *flips* que admiten dos medidas invariantes. Curiosamente, el problema se traduce a una cuestión de álgebra lineal en que hay que averiguar el número de columnas linealmente independientes que tiene un cierto producto de matrices cuadradas de orden 10×10 cuando n tiende a infinito. Para ver el tamaño de la primera matriz, M_1, redondeamos a una cifra en la mantisa,

$$M_1 = \begin{pmatrix} 3\cdot 10^{38} & 3\cdot 10^{38} & 7\cdot 10^{30} & 3\cdot 10^{33} & 3\cdot 10^{33} & 7\cdot 10^{30} & 5\cdot 10^{30} & 3\cdot 10^{30} & 5\cdot 10^{30} & 3\cdot 10^{30} \\ 2\cdot 10^{38} & 2 . 10^{38} & 4\cdot 10^{30} & 2\cdot 10^{33} & 2\cdot 10^{33} & 4\cdot 10^{30} & 3\cdot 10^{30} & 2\cdot 10^{30} & 3\cdot 10^{30} & 2\cdot 10^{30} \\ 2\cdot 10^{37} & 2\cdot 10^{37} & 4\cdot 10^{29} & 2\cdot 10^{32} & 2\cdot 10^{32} & 4\cdot 10^{29} & 3\cdot 10^{29} & 2\cdot 10^{29} & 3\cdot 10^{29} & 2\cdot 10^{29} \\ 5\cdot 10^{36} & 5\cdot 10^{36} & 10^{29} & 10^{34} & 10^{34} & 10^{29} & 7\cdot 10^{28} & 5\cdot 10^{28} & 7\cdot 10^{28} & 5\cdot 10^{28} \\ 7\cdot 10^{35} & 7\cdot 10^{35} & 10^{28} & 3\cdot 10^{31} & 3\cdot 10^{31} & 10^{28} & 10^{28} & 7\cdot 10^{27} & 10^{28} & 7\cdot 10^{27} \\ 10^{38} & 10^{38} & 2\cdot 10^{30} & 9\cdot 10^{32} & 9\cdot 10^{32} & 2\cdot 10^{30} & 2\cdot 10^{30} & 10^{30} & 2\cdot 10^{30} & 10^{30} \\ 2\cdot 10^{38} & 2\cdot 10^{38} & 4\cdot 10^{30} & 2\cdot 10^{33} & 2\cdot 10^{33} & 4\cdot 10^{30} & 3\cdot 10^{30} & 2\cdot 10^{30} & 3\cdot 10^{30} & 2\cdot 10^{30} \\ 9\cdot 10^{37} & 9\cdot 10^{37} & 2\cdot 10^{30} & 7\cdot 10^{32} & 7\cdot 10^{32} & 2\cdot 10^{30} & 10^{30} & 9\cdot 10^{29} & 10^{30} & 9\cdot 10^{29} \\ 2\cdot 10^{38} & 2\cdot 10^{38} & 3\cdot 10^{30} & 10^{33} & 10^{33} & 3\cdot 10^{30} & 3\cdot 10^{30} & 2\cdot 10^{30} & 3\cdot 10^{30} & 2\cdot 10^{30} \\ 9\cdot 10^{38} & 9\cdot 10^{38} & 2\cdot 10^{31} & 2\cdot 10^{34} & 2\cdot 10^{34} & 2\cdot 10^{31} & 10^{31} & 9\cdot 10^{30} & 10^{31} & 9\cdot 10^{30} \end{pmatrix}$$

Esa primera matriz se va multiplicando (de izquierda a derecha) por $M(r_2)\cdot M(r_3)\cdot \cdots \cdot M(r_n)$, donde

$$M(r) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2r & 2r+2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r+2 & r+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r & r+1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r+1 & r+2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4r+2 & 4r+6 & 10 & r+13 & r+12 & 8 & 4 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

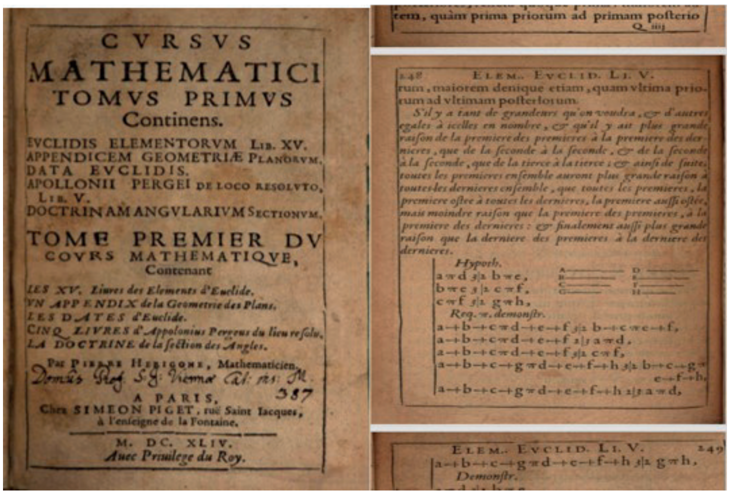
y $(r_n)_n$ es una adecuada sucesión de números naturales que tiende a infinito. Denotamos ese producto de matrices por N_n, $N_n = M_1 \cdot M(r_2)\cdot M(r_3)\cdot \cdots \cdot M(r_n)$, y la representamos como unión de columnas, $N_n = (c_1(n) \mid c_2(n) \mid \vdots \mid c_{10}(n))$, donde $c_l(n)$ indica la l-ésima columna de la matriz N_n, para $n > 1$ y $l \in \{1, 2, \cdots, 10\}$. Para obtener la siguiente matriz N_{n+1}, hacemos el producto $N_{n+1} = N_n \cdot M(r_{n+1})$. Al intentar averiguar el número de columnas linealmente independientes que se obtiene al considerar el límite de las matrices $N_n = (c_1(n) \mid c_2(n) \mid \vdots \mid c_{10}(n))$, según las simulaciones numéricas que realizamos, todo hacía indicar que en el límite teníamos solo dos direcciones linealmente independientes (las que se obtienen con las columnas segunda y cuarta, además con un ángulo entre ellas de unos

35 grados sexagesimales) y el resto de columnas tendía a combinaciones lineales de esas dos direcciones. Pero, ¿cómo demostrarlo? ¿De qué manera podíamos comparar la relación en el tamaño entre las diferentes columnas?

En ese momento es cuando hicimos uso de nuestra memoria de la historia matemática. Entre otros argumentos, uno esencial fue el siguiente resultado: si a, b, c, d, p, q son números reales positivos tales que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$; además si $\frac{a}{b} < \frac{p}{q}$ y $\frac{c}{d} < \frac{p}{q}$, se sigue también que $\frac{a+c}{b+d} < \frac{p}{q}$ (y lo mismo sucede si cambiamos el sentido de las desigualdades). ¡Pudimos resolver el problema gracias a una simple aplicación de la regla de Chuquet de la que hablamos en la primera sección de este trabajo![5]

El uso de las desigualdades anteriores fue consecuencia de tenerlas frescas en la memoria, porque por otra parte, de manera simultánea, estábamos analizando el tomo I del *Cursus mathematicus* de Hérigone (1634) para estudiar, entre otros asuntos, la labor de algebrización de las matemáticas de este autor en el siglo XVII, en donde es relevante su traducción con un nuevo lenguaje algebraico de los *Elementos* de Euclides.[6] En el libro V, dedicado a la teoría de proporciones, encontramos esta propiedad dentro de la proposición XXXI (véase la figura 8).

Así, el contacto con textos clásicos puede servir como fuente de inspiración para la resolución de problemas. Aquí, el uso de una sencilla desigualdad ha permitido una salida inesperada a una cuestión en sistemas dinámicos discretos. Destacamos, por tanto, la importancia de la memoria del pasado para servir de inspiración y para comprender mejor nuestro campo de trabajo. Como dijo el matemático francés Henri Poincaré (1908: 930): «Pour prévoir l'avenir des Mathématiques, la vraie méthode est d'en étudier l'histoire et l'état présent.»


CVRSVS
MATHEMATICI
TOMVS PRIMVS
Continens.
EVCLIDIS ELEMENTORVM LIB. XV.
APPENDICEM GEOMETRIÆ PLANORVM.
DATA EVCLIDIS.
APOLLONII PERGEI DE LOCO RESOLVTO, LIB. V.
DOCTRINAM ANGVLARIVM SECTIONVM.
TOME PREMIER DV
COVRS MATHEMATIQVE,
Contenant
LES XV. Liures des Elements d'Euclide.
VN APPENDIX de la Geometrie des Plans.
LES DATES d'Euclide.
CINQ LIVRES d'Appolonius Pergeus du lieu resolu.
LA DOCTRINE de la section des Angles.
Par PIERRE HERIGONE, Mathematicien.
A PARIS,
Chez SIMEON PIGET, rue Saint Iacques, à l'enseigne de la Fontaine.
M. DC. XLIV.
Auec Priuilege du Roy.

tem, quàm prima priorum ad primam posterio
Q iiij

148 ELEM. EVCLID. LI. V.
rum, maiorem denique etiam, quam vltima priorum ad vltimam posteriorum.
S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra, & d'autres egales à icelles en nombre, & qu'il y ait plus grande raison de la premiere des premieres à la premiere des dernieres, que de la seconde à la seconde, & de la seconde à la seconde, que de la tierce à la tierce: & ainsi de suite: toutes les premieres ensemble auront plus grande raison à toutes les dernieres ensemble, que toutes les premieres, la premiere ostee à toutes les dernieres, la premiere aussi ostée, mais moindre raison que la premiere des premieres, à la premiere des dernieres: & finalement aussi plus grande raison que la derniere des premieres à la derniere des dernieres.
Hypoth.
a π d 3|2 b π e,
b π e 3|2 c π f,
c π f 3|2 g π h,
Req. π. demonstr.
a+b+c π d+e+f 3|2 b+c π e+f,
a+b+c π d+e+f 2|3 a π d,
a+b+c π d+e+f 3|2 c π f,
a+b+c+g π d+e+f+h 3|2 b+c+g π e+f+h,
a+b+c+g π d+e+f+h 2|3 a π d,

ELEM. EVCLID. LI. V. 149
a+b+c+g π d+e+f+h 3|2 g π h,
Demonstr.

FIGURA 8. *Cursus mathematicus* de Hérigone, tomo I; *Les XV livres des éléments d'Euclide* (libro V, fragmento de la proposición XXXIV, *Cursus mathematicus*, tomo I, Hérigone, 1634).

5. El lector interesado en todos los detalles de la comparativa entre las diferentes columnas de las matrices N_n queda emplazado a consultar Linero y Soler (2020).

6. Véase Massa-Esteve (2010) para el estudio del tratamiento por parte de Hérigone de los *Elementos* de Euclides.

Conclusiones

A lo largo de este trabajo hemos visto casos prácticos de la utilidad de la historia de las matemáticas en diferentes aspectos de la enseñanza, en los ámbitos de la educación media y universitaria.

En cuanto a la educación secundaria, hemos apuntado su beneficio para contextualizar un tema, para proporcionar a los alumnos un acercamiento sugerente a un concepto, para transmitirles la idea de la evolución continua de nuestra disciplina y para ponerlos sobre aviso de las dificultades que puedan encontrarse. Todo ello lo hemos aderezado con actividades alrededor del cálculo de raíces enésimas, como las de aclarar su significado geométrico, y desarrollar habilidades matemáticas en cálculo, álgebra y geometría.

Otro de los beneficios del uso riguroso de la historia en la actividad docente universitaria es desarrollar una visión y conocimientos sólidos respecto a un tema, un autor o un resultado. Si cuidamos y fomentamos dicho rigor en tales análisis, nuestra comprensión de un tema será más completa, e incluso tendremos una perspectiva general más asentada de él. En nuestras notas, lo hemos ejemplificado con el teorema de Apolonio, viendo las conexiones que existen entre diferentes ámbitos de las matemáticas, como la geometría y el análisis funcional, y recibiendo la grata sorpresa de un interesante recorrido histórico.

Por último, hemos discutido algunas de las ventajas que tiene la historia en la labor de investigación. En particular, cómo la lectura de textos antiguos fortalece nuestra cultura histórica y, con la memoria fresca, sirve a veces de inspiración para desatar, por un camino inesperado, el nudo que se cernía sobre un problema concreto. En estas notas hemos mostrado cómo unas sencillas desigualdades, que tienen su origen último en los *Elementos* de Euclides, han permitido resolver un problema técnico de acotaciones de matrices para obtener un resultado sobre minimalidad en sistemas dinámicos discretos.

Agradecimientos

El segundo autor ha sido financiado parcialmente por el proyecto MTM2017-84079-P (AEI/FEDER, UE).

Referencias bibliográficas

AMIR-MOEZ, A. R.; HAMILTON, J. D. (1976). «A generalized parallelogram law». *Mathematics Magazine*, 49, pp. 88-89.

BARROW-GREEN, J.; GRAY, J.; WILSON, R. (2019). *The history of mathematics: A source-based approach*. Vol. 1. Providence, RI: MAA Press/American Mathematical Society.

CAJORI, F. (1910). «A history of the arithmetical methods of approximation to the roots of numerical equations of the unknown quantity». *Colorado College Publication*, 12, pp.171-286.

«Decreto n.º 220/2015, de 2 de septiembre de 2015, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de la Región de Murcia» (2015). *Boletín Oficial de la Región de Murcia*, núm. 203 (3 septiembre), p. 30729.

«Decreto n.º 221/2015, de 2 de septiembre de 2015, por el que se establece el currículo de Bachillerato en la Comunidad Autónoma de la Región de Murcia» (2015). *Boletín Oficial de la Región de Murcia*, núm. 203 (3 septiembre), p. 31594.

EULER, L. (1750). «Variae demonstrationes geometriae». *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, 1, pp. 49-66.

FERREIRÓS, J. (2003). «Por la historia». *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 6, pp. 103-111.

HÉRIGONE, P. (1634). *Cursus mathematicus nova, brevi et clara methodo demonstratus, per NOTAS reales & universales, citra usum cuiuscumque idiomatis, intellectu, faciles*. Tomos I a IV. París: por el autor y Henry Le Gras.

— (1637). *Cursus mathematicus nova, brevi et clara methodo demonstratus, per NOTAS reales & universales, citra usum cuiuscumque idiomatis, intellectu, faciles*. Tomo V. París: por el autor y Henry Le Gras.

— (1642). *Cursus mathematicus nova, brevi et clara methodo demonstratus, per NOTAS reales & universales, citra usum cuiuscumque idiomatis, intellectu, faciles*. Suplemento. París: por el autor y Henry Le Gras.

HERRERO PIÑEYRO, P. J.; LINERO BAS, A.; MELLADO ROMERO, A. (2017). «Algunos métodos de resolución numérica de ecuaciones del siglo XVI y su aplicación al aula de secundaria». A: GRAPÍ VILUMARA, P.; MASSA-ESTEVE, M. R. (ed.). *Actes de la XV Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament.* Barcelona: Institut d'Estudis Catalans. Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica, pp. 41-48.

LINERO BAS, A.; SOLER LÓPEZ, G. (2018). «Minimal interval exchange transformations with flips». *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 38, pp. 3101-3144.

— (2020). «Minimal non uniquely ergodic flipped IETs». Prepublicación. <arXiv:2001.10989v1>.

MASSA-ESTEVE, M. R. (2010). «The symbolic treatment of Euclid's elements in Hérigone's *Cursus mathematicus* (1634, 1637, 1642)». *Philosophical Aspects of Symbolic Reasoning in Early-Modern Mathematics*, 26, pp. 165-191.

— (2014). «Historical activities in the mathematics classroom: Tartaglia's nova scientia (1537)». *Teaching Innovations*, 27, pp. 114-126.

PAPPUS OF ALEXANDRIA (1986). *Book 7 of the collection*. Edición y traducción a cargo de Alexander Jones. Nueva York: Springer-Verlag.

POINCARÉ, H. (1908). «L'avenir des mathématiques». *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées*, 19, pp. 930-938.

RECASENS GALLART, E. (2008). «Sobre un dels treballs d'Euler en geometria clàssica: l'E135». *Quaderns d'Història de l'Enginyeria*, 9, pp. 205-218.

VIÈTE, F. (1600). *De numerosa potestatum ad exegesim resolutione*: *Ex opere restitutae mathematicae analyseos, seu, algebra nova Francisci Vietae.* Edición a cargo de Marino Ghetaldi. París: David Le Clerc.

— (1646). *Francisci Vietae Opera mathematica.* Edición a cargo de F. van Schooten. Leiden: Ex Officinâ Bonaventurae & Abrahami Elzeviriorum.

— (1983). *The analytic art, nine studies in algebra, geometry and trigonometry*. Traducción de T. Richard Witmer. Mineola (Nueva York): Dover Publications Inc.

ZARAGOZA, J. (1674). *Geometria magna in minimis*. Toledo: Francisco Calvo.